14-03-17

Άλγεβρα

Δακτύλιος πολυωνύμων

ορισμός: Ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο λέγεται $\boxed{\text{ακέραια περιοχή}}$ αν δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, δηλ αν $ab=0 \Rightarrow a=0$ ή $b=0$.

$+, -, \cdot$ 0

μεταθετικός ο δακτύλιος σημαίνει $ab=ba$

μοναδιαίο στοιχείο $1a=a, \forall a \in R$

Παράδειγμα: ακέραιας περιοχής είναι το $\mathbb{Z}$.

Άλλες ακέραιες περιοχές είναι:

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$

Παράδειγμα μη ακέραιας περιοχής $\mathbb{Z}_6$ $\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{0}$

(τελικόν)

Έστω R δακτύλιος και I ιδεώδες
R/I μπορεί να είναι ακέραια μπορεί και όχι
(σελίδα πηλίκο)

SOS

! Έστω D ακέραια περιοχή. Ένα πολυώνυμο $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ είναι ένα πεπερασμένο τυπικό άθροισμα με $a_i \in D$.

! Έστω $f(x), g(x)$ 2 πολυώνυμα.

$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$

$g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m$

(1) $f(x)=g(x)$ αν και μόνο αν $a_0=b_0, a_1=b_1, \dots a_i=b_i$

(2) $f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_i+b_i)x^i+\dots$

(3) $f(x)\cdot g(x)=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+$

$\dots+(a_0b_i+a_1b_{i-1}+a_2b_{i-2}+\dots+a_{i-1}b_1+a_ib_0)x^i+\dots$

$\dots+a_nb_mx^{n+m}$

! Το μηδενικό πολυώνυμο $0(x)=0+0x+\dots+0x^n$

$$f(x)+0(x)=f(x)$$

! Το μοναδιαίο πολυώνυμο $1(x)=1+0x+\dots 0x^n$

$$f(x)+1(x)=f(x)$$

! $D[x]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων με συντελεστές από την ακέραια περιοχή D.
$D[x]$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

! Έστω $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$.
Αν για κάποιο $i>0$ ισχύει $a_i\neq 0$, η μεγαλύτερη τέτοια τιμή του i λέγεται <u>βαθμός του πολυωνύμου</u> f και συμβολίζεται με $\deg f$. Αν $\nexists$ τέτοιο $i>0$ (έτσι ώστε $a_i\neq 0$) τότε λέμε ότι το $f(x)$ είναι βαθμού μηδέν.

Για το βαθμό του μηδενικού πολυωνύμου υπάρχουν 3 διαφορετικοί ορισμοί: $\deg 0=0$
Δεν ορίζεται
$\deg 0=-\infty$
Εμείς θα χρησιμοποιούμε στο μάθημα $\deg 0=0$

Σχόλιο

$\deg f=\deg_x f$! <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> !

<u>π.χ.</u>
$f(x,y)=3+7x+5y-2x^2+3xy+y^3-xy^7+x^4y^3$
$\deg_x f=4$

κοιτάμε τον μεγαλύτερο εκθέτη του x

Δηλαδή, $f(x)=(3+5y+y^3)+(7+3y-y^7)x-2x^2+y^3x^4$

Αν κοιτάζω το $f(x,y)$ ως προς y
$\deg_y f = 7$
Αν κοιτάζω το $f(x,y)$ ως προς τις 2 μεταβλητές
$\deg f = 8$

Παρατήρηση: (1) Αν $f \neq 0$, $g \neq 0$ τότε D ακέραια περιοχή
$\deg(fg) = \deg f + \deg g$

$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$ $\deg f = n$

$g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ $b_m \neq 0$ $\deg g = m$

$$fg = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1)x + \dots + \underbrace{(a_n b_m)}_{\neq 0} x^{n+m}$$

$\deg(fg) = n+m = \deg f + \deg g$

Τα βιβλία που ορίζουν $\deg 0 = -\infty$ οφείλεται στην προηγούμενη παρατήρηση (1).

Σχόλιο.

Θεώρημα: Αν D ακέραια περιοχή τότε και $D[x]$ είναι ακέραια περιοχή.

Απόδειξη

- $D[x]$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και ισχύει ότι αν $f \neq 0$ και $g \neq 0$ τότε $fg \neq 0$. Άρα, στον $D[x]$ δεν έχω διαιρέτες του μηδενός. □

Ορισμός: Ένα στοιχείο λέγεται μονάδα της ακέραιας περιοχής D αν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

Δηλαδή a μονάδα $\Rightarrow \exists\, b \in D$ τω $ab = 1$

Παραδείγματα

1) Μονάδες του $\mathbb{Z}$ $\{1,-1\}$

2) Μονάδες του $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}-\{0\}$

3) Μονάδες του σώματος K $K^* = K-\{0\}$

4) D ακέραια περιοχή

Μονάδες της $D[x]$

Έστω $f(x) \in D[x]$ μονάδα $\Rightarrow \exists\, g(x) \in D[x]$ τέτοιο ώστε:

$f(x)g(x)=1$

Παρατηρώ ότι $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$ (αφού $f(x)g(x)=1$).

Τότε, $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

$\deg(1) = \deg(f) + \deg(g)$, $\deg \in \mathbb{N}$

$0 = \deg(f) + \deg(g)$

$\Rightarrow \deg(f) = 0 = \deg(g)$

$\Rightarrow f, g$ σταθερές $\Rightarrow f, g \in D \Rightarrow f \in D$ και είναι μονάδα του D.

Οι μονάδες του $D[x]$ είναι μονάδες του D.

$D[x]$ δεν είναι σώμα.

□

ορισμός: Δύο στοιχεία λέγονται ισοδύναμα αν $a=ub$ όπου u μονάδα του D.

$a \sim b$ $\exists$ u μονάδα τέτοια ώστε $a=ub$

$\mathbb{Z}$ κλάσεις ισοδυναμίας $\{n,-n\}$

$\mathbb{Q}$ $\{0\}$, $\mathbb{Q}^*$

ορισμός: Ένα μη-μηδενικό στοιχείο $p \in D$ που δεν είναι μονάδα του D λέγεται ανάγωγο στοιχείο του D, αν η σχέση $p=ab \Rightarrow a$ μονάδα ή b μονάδα του D.

Παραδείγματα ανάγωγα του $\mathbb{Z}$, $p, -p$ όπου p πρώτος αριθμός

ανάγωγα του $\mathbb{Q}$ $\emptyset$

ανάγωγα του $\mathbb{C}[x]$ μόνο τα πολυώνυμα του πρώτου βαθμού

ανάγωγα του $\mathbb{R}[x]$ είναι τα πολυώνυμα

πρώτου βαθμού και δευτέρου βαθμού της μορφής $ax^2+bx+\gamma$ με
$b^2-4a\gamma<0$
ανάγωγα του $\mathbb{Q}$ είναι δύσκολο να βρεθούν (βλέπε Αλγεβρικές Δομές ΙΙ)
$\mathbb{R}[x,y]$ το x^n+y^n-1 ανάγωγο πολυώνυμο n βαθμού
x^n+y^n-1 → δεν γράφεται στην μορφή $f(x,y)g(x,y)$
↓ αν γράφεται μέσω της γεωμετρίας θα δω ένα από τα δύο ισούται με 1. □

ορισμός Μια ακέραια περιοχή D λέγεται *περιοχή μοναδικής ανάλυσης* αν: → (ΠΜΑ)

α) κάθε στοιχείο της D που δεν είναι μηδέν ή μονάδα αναλύεται σε γινόμενο πεπερασμένου πλήθους ανάγωγων στοιχείων και

β) Αν $p_1p_2\cdots p_t = q_1q_2\cdots q_s$ είναι δύο αναλύσεις του ίδιου στοιχείου σε γινόμενο ανάγωγων τότε $s=t$ και μπορούμε να ξαναριθμήσουμε τα ανάγωγα στοιχεία έτσι ώστε p_i και q_i να είναι ισοδύναμα για κάθε $1\le i\le s\le t$

Παράδειγμα $\mathbb{R}[x]$ $(x-1)(x^2+1)$ είναι ΠΜΑ
Το $(x-1)(x^2+1) = x^3-x^2+x-1$ ή $(x-1)(x^2+1)=(7x^2+7)(\frac{1}{7}x-\frac{1}{7})$ □

Παράδειγμα Το $\mathbb{Z}$ είναι ΠΜΑ
Το $\mathbb{Q}$ -//-
Το K(σώμα) είναι πάντα ΠΜΑ. □

Θεώρημα: Αν D είναι ΠΜΑ τότε και $D[x]$ είναι ΠΜΑ

- Γνωρίζω ότι $\mathbb{Z}$ είναι ΠΜΑ. Εφαρμόζω το Θεώρημα, προκύπτει ότι $\mathbb{Z}[x]$ είναι ΠΜΑ. Εφαρμόζω ξανά το Θεώρημα και προκύπτει ότι $\mathbb{Z}[x,y]$ είναι ΠΜΑ. Επαναλαμβάνω έχω ότι $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ είναι ΠΜΑ.

- $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{Θεώρημα}} \mathbb{R}[x]$ είναι ΠΜΑ $\Longrightarrow \mathbb{R}[x,y]$ ΠΜΑ $\Rightarrow \mathbb{R}[x,y,z]$
- $\mathbb{C} \xrightarrow{\text{Θεώρημα}} \mathbb{C}[x]$ είναι ΠΜΑ $\Longrightarrow \mathbb{C}[x,y]$ ΠΜΑ $\Rightarrow \mathbb{C}[x,y,z]$
- $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ (ή $\mathbb{C}[x,y]$)
  $f(x,y) = \varphi_1(x,y)\varphi_2(x,y)\cdots\varphi_t(x,y)$, όπου $\varphi_i(x,y)$ ανάγωγα

Είδαμε στο προηγούμενο μάθημα:
αν έχω $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$
καμπύλη $V(f) \subseteq \mathbb{R}^2$

$$V(f) = \{(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_0,y_0) = 0\}$$
$$V(x^2+y^2-1) = \{(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0^2+y_0^2-1 = 0\}$$

$f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ (ή $\mathbb{C}[x,y]$)
$f(x,y) = \varphi_1(x,y)\cdots\varphi_t(x,y)$

$$V(f) \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} V(\varphi_1) \cup V(\varphi_2) \cup \dots \cup V(\varphi_t)$$

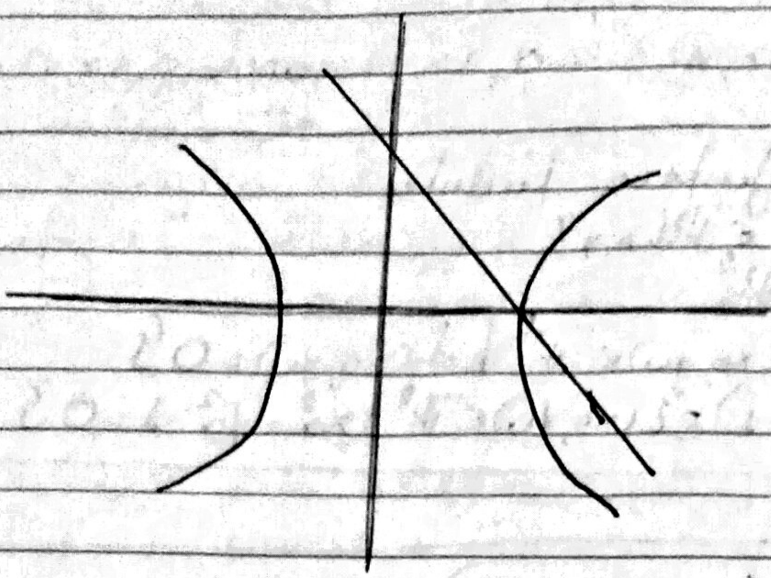
($\subseteq$) Έστω $(x_0,y_0) \in V(f) \Rightarrow f(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi_1(x_0,y_0)\varphi_2(x_0,y_0)\cdots\varphi_t(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow \varphi_i(x_0,y_0) = 0$
για κάποιο $1 \le i \le t$
$(x_0,y_0) \in V(\varphi_i) \Rightarrow (x_0,y_0) \in V(\varphi_1) \cup \dots \cup V(\varphi_t)$
($\supseteq$) Έστω $(x_0,y_0) \in V(\varphi_i) \Rightarrow \varphi_i(x_0,y_0) = 0$
$f(x_0,y_0) = \varphi_1(x_0,y_0)\cdots\underbrace{\varphi_i(x_0,y_0)}_{0}\cdots\varphi_t(x_0,y_0)$

$\rightsquigarrow f(x_0,y_0) = 0$
Άρα, $(x_0,y_0) \in V(f)$

Προσοχή

ορισμός: Αν $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ είναι ανάγωγο, τότε η καμπύλη $V(f)$ λέγεται ανάγωγη.
Κάθε καμπύλη είναι ένωση ανάγωγων καμπυλών.

$V((x+y-1)(x^2-y^2-1)) = V(x+y-1) \cup V(x^2-y^2-1)$



<u>Πρόταση</u>: Έστω D περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης και $p \in D$ ανάγωγο. Αν $p | ab$ τότε $p|a$ ή $p|b$.

<u>Απόδειξη</u>: $p | ab \Rightarrow ab = cp$, για κάποιο $c \in D$.

$p_1 p_2 \cdots p_t q_1 q_2 \cdots q_s = h_1 h_2 \cdots h_l p$

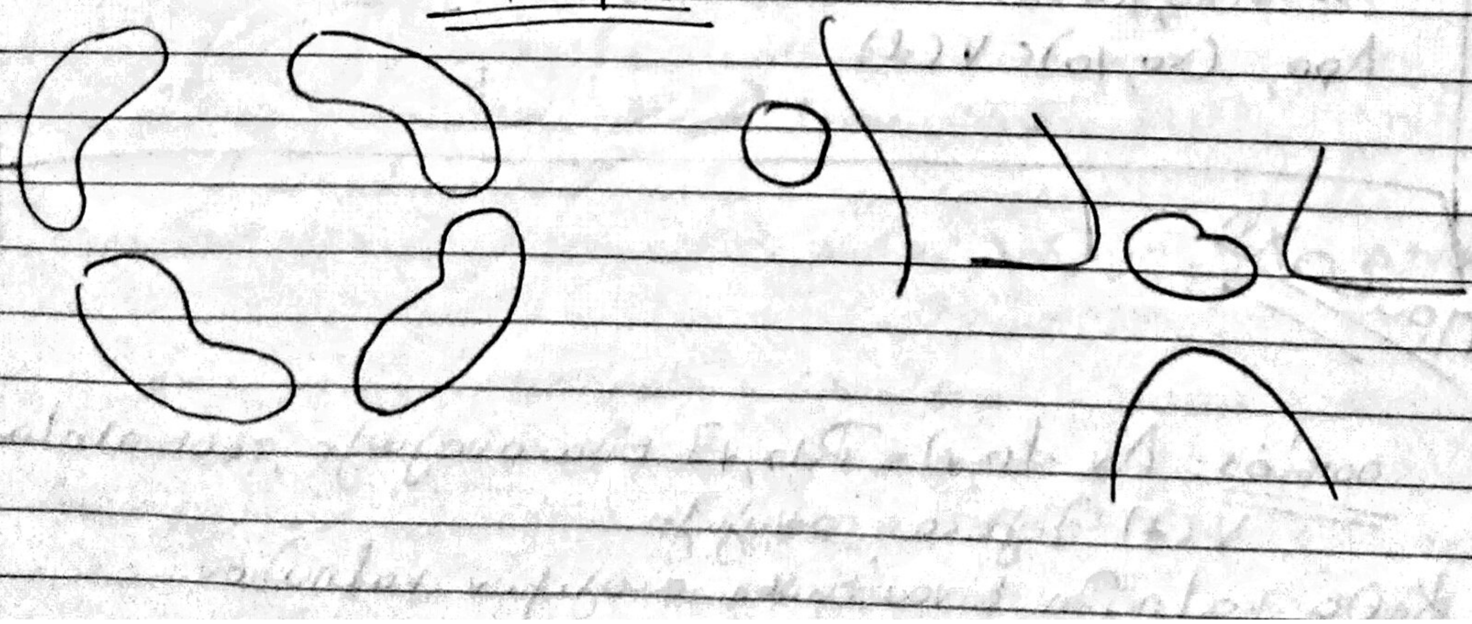
Αναλύουμε τα a, b και c ως γινόμενα ανάγωγα

$\xrightarrow{D\,\Pi M A}$ κάποιο από τα $p_1, p_2, \dots p_t, q_1, q_2 \dots q_s$ είναι ισοδύναμο με το p.

Αν ένα από τα p_i είναι ισοδύναμο με το p τότε το $p|a$.

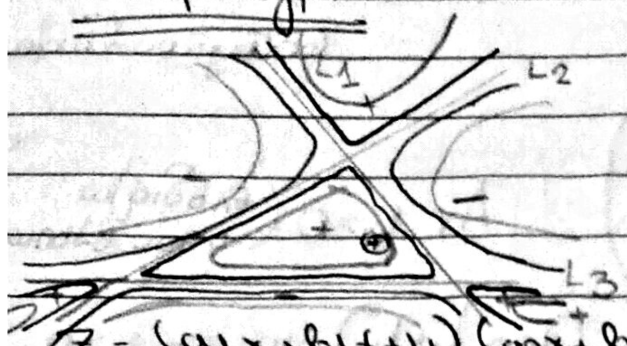
Αν ένα από τα q_i είναι ισοδύναμο με το p τότε το $p|b$. $\square$

<u>Γεωμετρία</u>



ο Felix Klein με τη βοήθεια καμπύλων $2^{ου}$ βαθμού να σχεδιάσει καμπύλες $3^{ου}$, $4^{ου}$ κοκ.

Παράδειγμα



1) $L_1 = a_1x + b_1y + \gamma_1$
$L_2 = a_2x + b_2y + \gamma_2$
$L_3 = a_3x + b_3y + \gamma_3$

$Z = L_1L_2L_3$

$Z = (a_1x + b_1y + \gamma_1)(a_2x + b_2y + \gamma_2)(a_3x + b_3y + \gamma_3)$

$Z = \varepsilon > 0$, το ε είναι θετικό και πολύ μικρό

$L_1L_2L_3 - \varepsilon = 0$

$Z = \varepsilon < 0$

Αν μεγαλώσω το ε (πολ/σιο του ε)

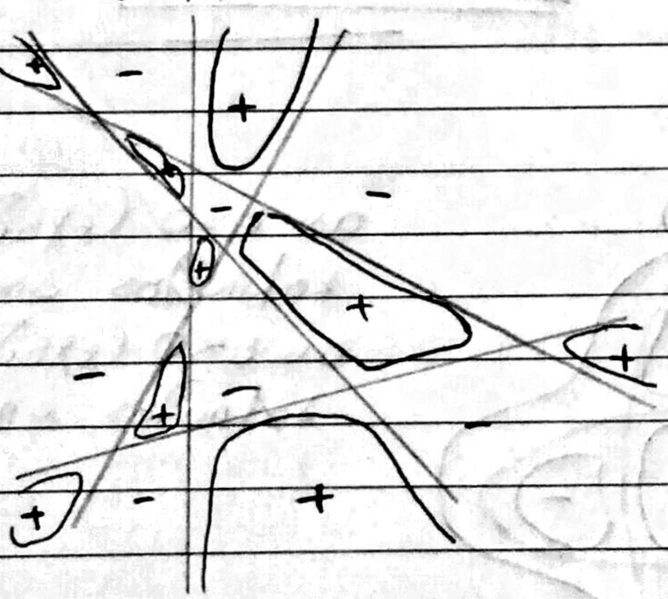
Όσο αφήνω το ε να μεγαλώσει στο κέντρο θα εξαφανισθεί

□

2) Έστω τώρα έχω 5 ευθείες L_1, L_2, L_3, L_4, L_5

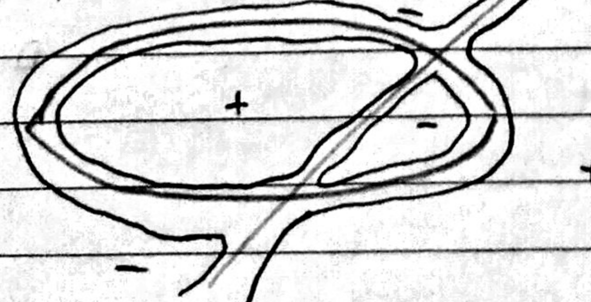
$V(L_1L_2L_3L_4L_5 - \varepsilon)$

αν $\varepsilon > 0$



□

3) $V(Q_1L_1 - \varepsilon)$ αν $\varepsilon > 0$ (κοιτάμε το +)



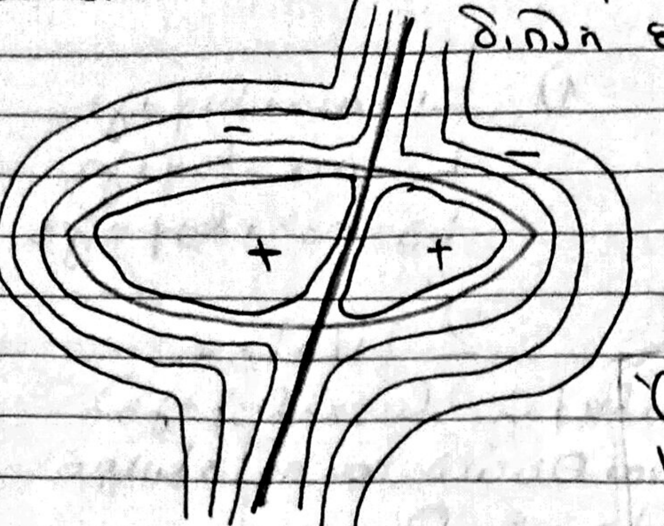
αν $\varepsilon < 0$ (κοιτάμε το −)

ευθεία, έλλειψη

□

4) $V(L^2Q-\varepsilon)$ έλλειψη διπλή ευθεία

η καμπύλη που θα σχεδιάσω είναι τετάρτου βαθμού



Αν $\varepsilon>0$ (σχεδιάζω όπου βλέπω +)

Όσο μεγαλώνει το $\varepsilon>0$ κάποια από τις 2 θα εξαφανισθεί θα γίνει σημείο. Για πολύ μεγάλο ε δεν θα έχω καμπύλη.

Αν $\varepsilon<0$ (σχεδιάζω καμπύλες στο −)

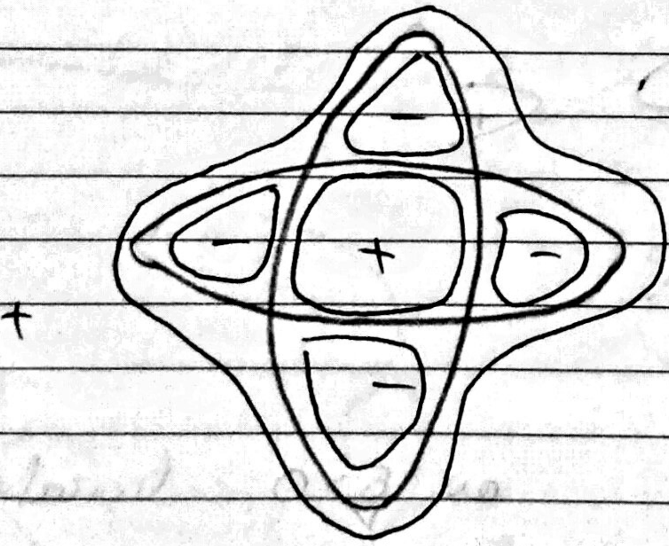
Όσο μεγαλώνει το ε, οι καμπύλες που σχεδιάζω δεν εξαφανίζονται αλλά απομακρύνονται.

□

5) $V(Q_1Q_2-\varepsilon)$

αν $\varepsilon>0$ (σχεδιάζω τις καμπύλες όπου έχει +)

αν $\varepsilon<0$ (σχεδιάζω τις καμπύλες όπου έχει −)



η καμπύλη είναι τετάρτου βαθμού

□